



Forblad

Centralt belastede Søjler

P.M.Frandsen

Tidsskrifter

BSM 1-3 Bygningsstatistiske Meddelelser

1929

CENTRALT BELASTEDE SØJLER.

AF P. M. FRANDSEN.

Engesser's Søjleformler.

Engesser¹⁾ har som bekendt vist, at Bæreevnen P for en centralt belastet Søjle med konstant Tværsnit F og Inertimoment I og med den frie Længde lig l altid kan angives paa Formen

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (1)$$

Er Søjlematerialet fuldstændig elastisk, betyder E i Formel (1) den til Søjleens Brudspænding $\sigma = \frac{P}{F}$ svarende Retningskoefficient $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ for Tangenten til Materialets Trykarbejdskurve $\sigma = f(\varepsilon)$. Specielt for Materialer, der følger Hooke's Lov $\sigma = E \cdot \varepsilon$, er E konstant for alle Værdier af σ , og (1) bliver da til Euler's Formel.

Er Søjlematerialet ufuldstændig elastisk, skal for E i Formel (1) sættes

$$E = E_1 \frac{I_1}{I} + E_2 \frac{I_2}{I}, \quad (2)$$

hvor E_1 er den til Søjleens Brudspænding $\sigma = \frac{P}{F}$ svarende Retningskoefficient $\frac{d\sigma}{d\varepsilon_1}$ bestemt af Trykarbejdskurven $\sigma = f(\varepsilon_1)$ for Materialets totale Deformationer, medens E_2 er den til samme Spænding svarende Retningskoefficient $\frac{d\sigma}{d\varepsilon_2}$ bestemt af Trykarbejdskurven $\sigma = f(\varepsilon_2)$ for Materialets elastiske Deformationer. I_1 og I_2 er Inertimomenter med Hensyn til Middelspændingsaksen af Tværsnittets henholdsvis merbelastede og aflæ-

1) Zeitschrift d. hannover. Arch. u. Ing.-Ver. 1889, Bd. 35, Side 455.

Schweizerische Bauzeitung 1895, Bd. 26, Side 24.

Zeitschrift d. Ver. deutscher Ing. 1898, Side 927.

stede Dele, som fremkommer ved en begyndende Udbøjning af Søjlen. Disse Omraader af Tværsnittet adskilles ved Middelspændingsaksen, hvor Middelspændingen $\sigma = \frac{P}{F}$ ikke forandres.

Formel (2) i Forbindelse med (1) er ogsaa angivet af *Kármán*¹⁾, som paaviste Formlens Rigtighed ved Forsøg med Staalsøjler af rektangulært Tværsnit. Formlerne i denne Skikkelse egner sig ikke umiddelbart til Anvendelse i Praksis. *Engesser* og andre har forsøgt at hjælpe herpaa ved at bestemme E empirisk af Søjleforsøg.

En bedre Form faas dog ved som Tilnærmelse i (2) at sætte $E_2 = E_1$, hvorved (2) giver $E = E_1$ og altsaa (1):

$$P = \frac{\pi^2 E_1 I}{l^2}. \quad (3)$$

E_1 bestemmes her af Trykarbejdskurven for Søjlematerialets totale Deformationer.

Da $E_2 > E_1$, vil (3) give mindre (regningsmæssige) Værdier for Bæreevnen end (1) i Forbindelse med (2), men at dens Resultater passer godt med *Kármán*'s Forsøgsresultater helt op til Flydegrænsen er tidligere vist (se Teknisk Forenings Tidsskrift 1920, Side 142). Kun for Spændinger mellem Flydegrænsen og Brudgrænsen maa anvendes de nøjagtigere Formler. Da dette sidste Omraade imidlertid ingen praktisk Betydning har, danner (3) et godt Grundlag for praktiske Søjleformler.

Empiriske Søjleformler.

Ved Division af Formel (3) med Søjleens Tværsnitsareal F faas Søjleens Brudspænding udtrykt ved

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_1}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (4)$$

hvor i er Tværsnittets Inertiradius.

For Materialer, hvis Trykarbejdskurve følger Hooke's Lov, er (4) direkte anvendelig som Søjleformel, idet E_1 er konstant lig E_p . For alle Værdier af Brudspændingen σ mellem Nul og Proportionalitetsgrænsen σ_p faas da *Euler's Formel*

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_p}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \quad (5)$$

For Materialer med Arbejdskurver af vilkaarlig Form er E_1 Funktion af

1) *Th. v. Kármán*: Untersuchungen über Knickfestigkeit (Dissert. 1908). Findes ogsaa i Mitt. über Forschungsarbeiten aus dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 81, 1910.

σ , og (4) maa derfor for at blive praktisk brugelig gøres explicit i σ , hvortil der for hvert Materiale kræves et analytisk Udtryk for E_1 bestemt af de totale Deformationers Arbejdskurve. Ved en Udvikling, som her skal forbigaaes, kan det vises (se Teknisk Forenings Tidsskrift 1920, Side 139—150), at E_1 nøjagtigt nok kan udtrykkes ved Materialets Trykbrudspænding σ_B , Proportionalitetsgrænsen σ_P samt Retningskoefficienten E_P for Trykarbejdskurven i Punktet σ_P , hvorved Engesser's Formel (3) omskrives til:

$$\sigma = \frac{\sigma_B - \frac{\sigma_P^2}{\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2}{1 + \frac{\sigma_B - 2\sigma_P}{\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2}. \quad (6)$$

For Træ og Støbejern, Jærnbeton o. l. betyder σ_B Materialets virkelige Trykbrudgrænse, medens ved smedeligt Jærn, Blødt Staal og andre seje Metaller med udpræget Flydning σ_B er Trykflydegrænsen.

For $\sigma = \sigma_P$ gaar Formel (6) kontinuert over i Euler's Formel (5).

Ved ideale Søjler af Materialer, som delvis følger Hooke's Lov, skal Overgangspunktet $\sigma = \sigma_P$ mellem Gyldighedsomraaderne for de to nævnte Formler netop være Materialets Proportionalitetsgrænse. Dette bekræftes smukt ved Kármán's Forsøg med Søjler af Martinstaal (Mitt. über Forschungsarbeiten, Heft 81, 1910). Ved disse Søjleforsøg er det lykkedes at faa Centreringsforholdene til at stemme med den ideale Søjles, hvilket opnaedes ved indstillelige Lejer, saaledes at Trykket stadig kunde centreret paa Forsøgsstykkernes virkelige Centerlinier.

For Søjler af Materialer med krum Arbejdskurve er $\sigma_P = 0$, og Formel (6) gælder da for alle Værdier af σ .

Ved praktiske Søjler, hvor Trykkets Centrering ligesom Materialets Elasticitet og Homogenitet samt Søjle's prismaticke Form er ufuldkommen, ligger Overgangspunktet $\sigma = \sigma_P$ mellem Gyldighedsomraaderne for Formel (6) og Euler's Formel (5) altid lavere end Proportionalitetsgrænsen i Trykarbejdskurven og desto lavere jo mere fremtrædende de nævnte Mangler er.

I Følge Tetmajer's Søjleforsøg, hvis Ufuldkommenheder kan betragtes som rimelige Udtryk for praktiske Søjlers Mangler, kan sættes:

For Blødt Staal $\sigma_P = \frac{1}{2} \sigma_B$

» Støbejern m. fl. $\sigma_P = 0$

» Træ (Fyr) $\sigma_P = \frac{1}{3} \sigma_B$

Med disse Værdier faas af Formel (6):

For Staaletsøjler:

$$\sigma = \sigma_B \left(1 - \frac{\sigma_B}{4\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2 \right), \quad (7)$$

hvilket er *Johnson-Ostenfeld's* Parabelformel, som bruges for $\sigma > \frac{1}{2}\sigma_B$ i Forbindelse med *Euler's* Formel (5) for $\sigma < \frac{1}{2}\sigma_B$.

For Støbejernssøjler m. fl.:

$$\sigma = \frac{\sigma_B}{1 + \frac{\sigma_B}{\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (8)$$

hvilket er *Rankine's* Formel, som bruges for alle σ .

For Træsøjler:

$$\sigma = \sigma_B \frac{1 - \frac{\sigma_B}{9\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2}{1 + \frac{\sigma_B}{3\pi^2 E_P} \left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (9)$$

som bruges for $\sigma > \frac{1}{3}\sigma_B$ i Forbindelse med *Euler's* Formel for $\sigma < \frac{1}{3}\sigma_B$.

For Benyttelsen af Formel (6) er Kendskabet til Materialernes Trykflydegrænse og Trykbrudgrænse af afgørende Betydning. Ved Søjleforsøg med Træ, Støbejern m. fl. er det almindeligt at angive Trykstyrken. Derimod angives som Regel ved Blødt Staal o. l. Styrketallene fra Trækforsøg.

Det er derfor af stor Interesse, at *Ostenfeld* ved sine Forsøg med Staal-søjler 1928 (se Danmarks naturvidenskabelige Samfunds Skrifter Serie A Nr. 16, Side 31) er kommen ind paa at bestemme Forsøgsstykkernes Trykflydegrænser. De nævnte Forsøg behandlede 4 Søjler af Blødt Staal med særlig Profilform sammensat af 2 Vinkeljærn (bestemt for et af Ingeniørerne *Nøkkentved* og *Früis-Jespersen* projekteret Radiotaarn i Kalundborg).

Maaleresultaterne er gengivet i hosstaaende Tabel.

Søjle Nr.	F cm ²	l cm	$\frac{l}{i}$	Maalt P t	$\sigma = \frac{P}{F}$ kg/cm ²	Maalt σ_B kg/cm ²
1	2.19,56	257	69	86,2	2203	2920
2	2.19,70	257	69	87,4	2218	2905
3	2.19,13	398,6	107	60,8	1589	2955
4	2.19,66	398,6	104	67,0	1704	3325

P er Brudbelastningerne, σ_B Trykflydegrænserne.

Ved Anvendelse af Formel (6) paa disse Forsøgsresultater maa først bestemmes Størrelsen af Formlens σ_P , der som ovenfor nævnt er et Udtryk for Centreringens Godhed og Søjle's Fuldkommenhedsgrad.

Til Bestemmelse af σ_P omskrives (6) til ($\sigma > \sigma_P$ for alle Søjlerne):

$$\sigma_P = \sigma - \sqrt{(\sigma_B - \sigma)(\sigma_E - \sigma)},$$

hvor $\sigma_E = \frac{\pi^2 E_P}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ med $E_P = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Med $\pi^2 \approx 10$ findes ved Regning paa Regnestok:

$$\sigma_P = 0,322 \sigma_B, \quad \sigma_P = 0,341 \sigma_B, \quad \sigma_P = 0,341 \sigma_B \text{ og } \sigma_P = 0,326 \sigma_B$$

henholdsvis for Søjlerne Nr. 1, 2, 3 og 4. Som Middeltal faas heraf

$$\frac{\sigma_P}{\sigma_B} = \frac{1,350}{4} = 0,3325 \approx \frac{1}{3}.$$

Af Formel (6) beregnes dernæst følgende Værdier for Søjlernes Brudspændinger σ :

Nr. 1: $\sigma_B = 2920 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_P = \frac{1}{3} 2920 = 973 \text{ kg/cm}^2$ og $\sigma_E = 4412 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = \frac{2920 - \frac{973^2}{4412}}{1 + \frac{2920 - 1946}{4412}} = 2215 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Maalt } 2203 \text{ kg/cm}^2)$$

Nr. 2: $\sigma_B = 2905 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_P = \frac{1}{3} 2905 = 968 \text{ kg/cm}^2$ og $\sigma_E = 4412 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = \frac{2905 - \frac{968^2}{4412}}{1 + \frac{2905 - 1936}{4412}} = 2207 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Maalt } 2218 \text{ kg/cm}^2)$$

Nr. 3: $\sigma_B = 2955 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_P = \frac{1}{3} 2955 = 985 \text{ kg/cm}^2$ og $\sigma_E = 1835 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = \frac{2955 - \frac{985^2}{1835}}{1 + \frac{2955 - 1970}{1835}} = 1580 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Maalt } 1589 \text{ kg/cm}^2)$$

Nr. 4: $\sigma_B = 3325 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_P = \frac{1}{3} 3325 = 1108 \text{ kg/cm}^2$ og $\sigma_E = 1940 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = \frac{3325 - \frac{1108^2}{1940}}{1 + \frac{3325 - 2216}{1940}} = 1712 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Maalt } 1704 \text{ kg/cm}^2).$$

Overensstemmelsen ses altsaa at være god.

Dimensioneringsformler.

Formel (6) egner sig ikke umiddelbart til Dimensionering, men ved som sædvanlig at indføre Størrelsen

$$\zeta = \frac{F^2}{I}$$

som bekendt, faas med Sikkerhedsgraden n og ved at sætte

$$r_s = \frac{1}{n} \sigma, \quad r_0 = \frac{1}{n} \sigma_B, \quad F = \frac{P}{r_s} \quad \text{og} \quad F_0 = \frac{P}{r_0}$$

samt

$$\alpha = \frac{\sigma_P}{\sigma_B} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{\zeta \cdot \frac{\sigma_B l^2}{\pi^2 E_P}}{F_0}$$

til Dimensionering af Tværsnittet F for en given Belastning P :

Af Formel (6):

$$F = F_0 (1 + \alpha^2 \beta) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta(1 - 2\alpha)}{(1 + \alpha^2 \beta)^2}} \right) \quad \text{for } \alpha^2 \beta < 1. \quad (10)$$

Af Euler's Formel:

$$F = F_0 \sqrt{\beta} \quad \text{for } \alpha^2 \beta > 1. \quad (11)$$

Er specielt $\alpha = \frac{1}{2}$ (Johnson-Ostenfeld's Formel), faas:

$$F = F_0 (1 + \frac{1}{4} \beta);$$

er $\alpha = 0$ (Rankine's Formel), faas:

$$F = F_0 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta} \right).$$

BEREGNING AF RAMMER, PORTALER OG BUER VED HJÆLP AF EN SLUTPLAN.

AF F. SODEMANN.

En lukket Ring eller Ramme paavirket af ydre Kræfter i Ringens Plan tænkes fastholdt i et vilkaarligt Punkt P og skaaret op umiddelbart ved Siden af dette Punkt, se Fig. 1. Under Paavirkning af de ydre Kræfter vil Ringens frie Ende, idet der kun tages Hensyn til Virkningen af de af Kræfterne fremkaldte Momenter M_0 , men ikke til de fremkaldte Normalkræfters Virkning, forskydes et vist Stykke δ^{M_0} i Forhold til Ringens faste Ende, og Ringens frie Snitflade vil drejes en vis Vinkel φ^{M_0} i Forhold til den fastholdte Snitflade.

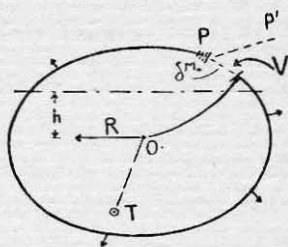


Fig. 1.

Snitkræfterne, nemlig et Kraftpar V og en Enkeltkraft R , der tænkes at angribe i Endepunktet af en stiv Arm fra Ringens frie Ende til Tyngdepunktet O for Kræfterne $\frac{ds}{EI}$, bestemmes nu saaledes, at de kan bringe Ringen til at lukke sig.

Alle Ringens Tværsnit antages foreløbig at have samme Inertimoment, hvorved O bliver Ringens Tyngdepunkt. Momenterne regnes positive, naar de giver Tryk paa Ringens Yderside.

Momenter.

Idet Værdierne af samtlige Momenter tænkes afsat langs Frembringerne af en ret Cylinder, der har Ringen som Ledelinie, ses det, at Momenterne hidrørende fra V begrænses ved et plant Snit i Cylinderen parallelt med Ringen i Afstanden V , hvilket Snit altsaa afskærer Arealet VL , hvor L er Ringens Længde, og at Momenterne hidrørende fra R fremstilles ved et plant Snit, som gaar gennem Tyngdepunktet O og af Cylinderen afskærer Arealet Nul og har sit Spor faldende i R 's Retning. Den samlede Momentflade for Snitkræfterne fremstilles altsaa ved en Plan, Slutplanen, som har sin Nullinie parallel med R , og som afskærer Arealet

VL. Idet positive M_0 -Ordinater afsættes til samme Side som negative Slutplansordinater og omvendt, vil de virkelige Momenter M i Ringen være Differenserne mellem M_0 -Ordinaterne og Slutplansordinaterne.

Den frie Snitflades Vinkeldrejning φ^{M_0} er $\int \frac{M_0 ds}{EI} = \frac{F}{EI}$. Vinkeldrejningen er altsaa lig $\frac{1}{EI}$ Gange Momentfladens Areal, og da Vinkeldrejningen hidrørende fra Snitkræfterne skal være lig og modsat Vinkeldrejningen hidrørende fra de ydre Kræfter, følger heraf, at det Areal VL , som Slutplanen afskærer, er lig M_0 -Fladens Areal F . Slutplanens Ordinater V i Tyngdepunktet O er altsaa lig M_0 -Fladens Middelordinat $\frac{F}{L}$.

Projektionen paa en vilkaarlig Retning PP' af den frie Endes Forskydning δ^{M_0} hidrørende fra de ydre Kræfter er $\int \frac{M_0 ds}{EI} \cdot \rho$, hvor ρ er hvert enkelt Punkts vinkelrette Afstand fra PP' . Forskydningen i vilkaarlig Retning PP' er altsaa lig $\frac{1}{EI}$ Gange Produktet af Momentfladens Areal og den vinkelrette Afstand fra Momentfladens Tyngdepunkt T til Linien PP' . Da nu Forskydningen i den vilkaarlige Retning PP' hidrørende fra M_0 maa være lig Forskydningen i modsat Retning hidrørende fra Snitkræfterne, og altsaa M_0 -Fladens Moment om enhver Axe gennem P er lig og modsat Momentet af den til Snitkræfterne svarende Momentflade, nemlig det af Slutplanen afskaarne Areal, følger heraf, at M_0 -Fladen og det af Slutplanen afskaarne Areal har fælles Tyngdepunkt.

Tilsvarende Resultater findes for det Tilfælde, at Ringen har variabelt Inertimoment. »Ringens Tyngdepunkt« bestemmes da som Tyngdepunktet for et ringformet Areal med samme Midtlinie som Ringen og med Bredden $\frac{1}{EI}$, der er omvendt proportional med det variable Inertimoment af den virkelige Rings Tværsnit. » M_0 -Tyngdepunktet« bliver Tyngdepunktet for en Cylinderskal med det ovennævnte ringformede Areal som Grundflade og Momenterne M_0 som Højde. Det af Slutplanen afskaarne Volumen VL , hvor L nu er $\int \frac{ds}{EI}$, bliver lig M_0 -Voluminet F , som nu er $\int \frac{M_0 ds}{EI}$.

Man kan derfor opfatte Slutplanens Ordinater som Spændingerne i en tyndvægget Cylinder, der har Ringen til Ledelinie og har Vægtykkelse omvendt proportional med Ringens

gens Tværsnits Inertimoment i hvert enkelt Punkt og er excentrisk belastet med M_0 -Voluminets Vægt F virkende i M_0 -Voluminets Tyngdepunkt T . Heraf følger bl. a. at R 's Retning er konjugeret med Retningen OT , og at Nullinien er T 's Antipolar med Hensyn til det ringformede Areal L 's Centralellipse.

Dette ses ogsaa ved at sammenligne Formlerne for skæv Bøjning (*Ostenfeld*: Teknisk Elasticitetslære, S. 388) med Udtrykket for Momentet i en plan lukket Ring (*Ostenfeld*: Teknisk Statik II, S. 280).

Hvis der kan lægges en Plan gennem M_0 -Fladens Rand, maa Slutplanen falde sammen med denne Plan, og samtlige Momenter i Ringen vil da være Nul, d. v. s. Ringen er Ligevægtsfigur for de paa den virkende ydre Kræfter. Hvis M_0 -Fladens Tyngdepunkts Projektion paa Ringens Plan falder sammen med Ringens Tyngdepunkt, bliver Slutplanen parallel med Ringens Plan i en Afstand derfra lig M_0 's Middelværdi.

Normalkræfter.

De virkelige Normalkræfter i den uopskaarne Ring er Summen af Normalkræfterne N_0 frembragte af de ydre Kræfter virkende paa den opskaarne Ring og de Normalkræfter, som frembringes af Snitkraften R ; Kraftparret V giver nemlig ikke noget Bidrag til Normalkræfterne. Man har altsaa $N = N_0 + R \cos \psi$, hvor $R \cos \psi$ er R 's Projektion paa Tangenten i vedkommende Punkt af Ringen.

I de Punkter, hvor Ringen skæres af Nullinien, maa Summen af Momenterne hidrørende fra V og R være Nul. Heraf følger, at R 's Retning er parallel med Nullinien, og at R er numerisk lig $\frac{V}{h}$, hvor h er den vinkelrette Afstand fra Ringens »Tyngdepunkt« til Nullinien, og V er lig $\frac{-F}{L}$. Den positive Retning af R bestemmes ved, at naar F er positiv, bliver Momentet fra R negativt i alle Punkter paa samme Side af R 's Retningslinie som M_0 -Tyngdepunktet.

Snitkraften R 's Bidrag til Normalkraften bliver Nul for de Punkter af Ringen, hvis Tangenter staar vinkelret paa Nullinien. Hvis F er positiv, virker Normalkraftbidraget fra R som Tryk i den Del af Ringen, der ligger nærmest M_0 -Tyngdepunktet, men som Træk i den modsatte Del af Ringen.

Temperaturspændinger.

Hvis Dele af Ringen opvarmes t° stærkere end Resten, og Ringen skæres op, vil den frie Ende derved forskydes et Stykke δ^t , som i Størrelse og Retning er lig den geometriske Resultant af Forlængelserne *etds*. Den frie Snitflades Retning vil derimod ikke forandres. Heraf føl-

ger at Snitkraften V^t maa være Nul, da der ellers vilde ske en Vinkel-drejning af den frie Snitflade. Snitkraften R^t bestemmes nu saaledes i Størrelse og Retning, at den ved at virke alene kan bringe Ringen til at lukke sig, se Fig. Fig. 2. De til Kraften R^t svarende Momenter fremstilles ved et plant Snit, som gaar gennem O og har sit Spor i R^t 's Retning.

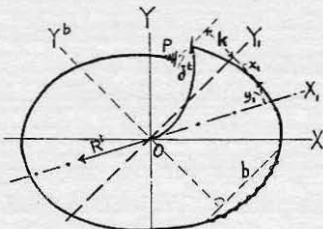


Fig. 2.

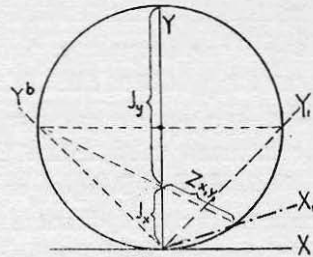


Fig. 3.

Da Forskydningen vinkelret paa δ^t er Nul, maa Momentvoluminets Moment om en Axe gennem P vinkelret paa δ^t være Nul, d. v. s. dets Tyngdepunkt maa ligge paa Linien gennem P vinkelret paa δ^t . Momentvoluminets Tyngdepunkt ligger imidlertid ogsaa uendelig fjernt paa den med R^t konjugerede Diameter, og denne sidste er altsaa vinkelret paa δ^t . Heraf følger at R^t 's Retning er konjugeret med Axen Y^b vinkelret paa Forskydningen δ^t .

Da den til Temperaturudvidelsen svarende Forskydning δ^t af Ringens frie Ende skal være lig og modsat den af R^t bevirkede Forskydning, som jo er lig $\frac{1}{EI}$ Gange Momentvoluminets Moment om δ^t , har man, idet Axen R^t kaldes X_1 , og Axen parallel med den opvarmede Bues Korde b kaldes Y_1 , og Koordinaterne x_1 og y_1 maales vinkelret paa Axerne

$$\begin{aligned}
 -\delta^t &= \delta^{R^t}, \\
 -\varepsilon bt &= \int \frac{M^{R^t} ds}{EI} (x_1 + k) = \int \frac{R^t y_1 ds}{EI} (x_1 + k) = R^t \cdot Z_{x_1 y_1}, \\
 R^t &= \frac{-\varepsilon bt}{Z_{x_1 y_1}}, \text{ hvor } Z_{x_1 y_1} \text{ er } \int \frac{x_1 y_1 ds}{EI}.
 \end{aligned}$$

Fig. 3 viser, at Konstruktionen af X_1 og $Z_{x_1 y_1}$ ved Hjælp af Land's Cirkel er yderst simpel, naar Hovedaxerne samt Hovedinertimomenterne I_x og I_y kendes. Hvis Faktoren $\frac{1}{EI_c}$ har været udeladt i de ved Konstruktionen benyttede Inertimomenter I_x og I_y , maa den fundne Værdi af $Z_{x_1 y_1}$ naturligvis multipliceres med $\frac{1}{EI_c}$. Er b parallel med en Hovedaxe, bliver $Z_{x_1 y_1}$ Inertimomentet om denne Axe.

Temperaturmomentet i et vilkaarligt Punkt er:

$$M^t = R^t y_1 = \frac{\varepsilon b t}{Z_{x_1 y_1}} \cdot y_1.$$

Momentet bliver negativt paa den Side af X_1 , hvor den opvarmede Bue findes.

Temperaturnormalkraften i et vilkaarligt Punkt findes ved at projicere R^t ind paa Tangenten i vedkommende Punkt. Der bliver Tryk i den Del af Ringen, hvor den opvarmede Bue findes, og Træk i den modsatte Del.

Hvis en Bue af Ringen, se Fig. 4, er A° varmere paa den ene

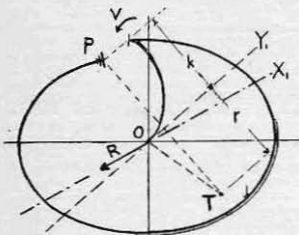


Fig. 4.

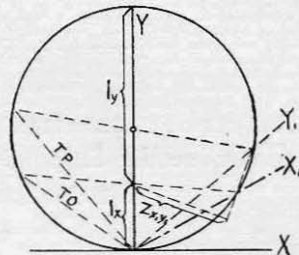


Fig. 5.

end paa den anden Side, og Ringen tænkes skaaret op i et vilkaarligt Punkt P , vil der, idet h er Tværnsnittets variable eller konstante Højde, indtræde Vinkeldrejninger $\frac{\varepsilon A}{h} \cdot ds$, ganske som om et Moment $\frac{EI\varepsilon A}{h}$ havde virket paa Bueelementet ds . Bestemmes nu Tyngdepunktet T for Kræfterne $\frac{\varepsilon A}{h} ds$, vil Nullinien være T 's Antipolar. Slutplanen bestemmes ved at den skal gaa gennem Nullinien, og at dens Ordinater i O skal være

$$-\frac{F}{L} = -\int \frac{\varepsilon A}{h} ds : \int \frac{ds}{EI}.$$

Temperaturmomenterne bliver selve Slutplanens Ordinater som, naar Buen er varmest paa den udvendige Side, bliver positive paa den Side af Nullinien, hvor T ligger.

Den frie Endes Forskydning paa Grund af Vinkeldrejningerne $\frac{\varepsilon A}{h} ds$ er vinkelret paa TP , og dens Størrelse er $F \cdot \rho$. Naar Axen gennem O vinkelret paa TP kaldes Y_1 , og den med OT konjugerede Axe (som jo falder sammen med R) kaldes X_1 , og P 's og T 's Afstande fra Y_1 kaldes henholdsvis k og r , har man til Bestemmelse af Snitkræfterne V og R :

$$\begin{aligned}
 -\delta^A &= \delta^V + \delta^R \\
 -F\varrho &= \int \frac{V ds}{EI} (k + x_1) + \int \frac{R y_1 ds}{EI} (k + x_1), \text{ hvor } V = \frac{-F}{L}, \varrho = r + k, \\
 -F(r + k) &= \frac{-F}{L} \cdot kL + R \cdot Z_{x_1 y_1} & L &= \int \frac{ds}{EI}, \quad F = \int \frac{\varepsilon A}{h} ds \quad \text{og} \\
 R &= \frac{-Fr}{Z_{x_1 y_1}} & Z_{x_1 y_1} &= \int \frac{x_1 y_1 ds}{EI},
 \end{aligned}$$

idet x_1 og y_1 maales vinkelret paa Axerne. Kendes X og Y samt I_x og I_y , findes $Z_{x_1 y_1}$ let ved Land's Cirkel, idet Y_1 er vinkelret paa TP , og X_1 er konjugeret med OT , se Fig. 5.

Temperaturmomentet i et vilkaarligt Punkt bliver

$$M^A = V + R y_1 = \frac{-F}{L} - \frac{Fr}{Z_{x_1 y_1}} \cdot y_1.$$

Temperaturnormalkraften bliver: $N^A = R \cos \psi$, der naar Buen er varmest paa udvendig Side, giver Træk i den Del af Ringen, hvor T findes.

Charnierer.

Naar Ringen indeholder et Charnier, maa det virkelige Moment i Charnieret være Nul, og Slutplanen maa derfor gaa gennem Endepunktet af M_0 -Ordinaten i Charnieret. Slutplanens Beliggenhed bestemmes i øvrigt ved at for to forskellige Axer gennem Charnieret skal M_0 -Voluminets Moment være lig Momentet af det Volumen, som Slutplanen afskærer.

For Axer, som ikke gaar gennem Charnieret, vil tilsvarende Momentligninger ikke kunne anvendes, da det Volumen, som svarer til Charnieret, bliver ubestemt, nemlig $\frac{M_0 ds}{EI} \propto \frac{0}{0}$, idet Charnieret opfattes som et Ringelement med uendelig lille Inertimoment. Af samme Grund vil man heller ikke, naar der er et Charnier, kunne benytte sig af at M_0 -Voluminet skal være lig det Volumen, som Slutplanen afskærer.

Indeholder Ringen to i Forhold til hinanden fastholdte Charnierer (to faste simple Understøtninger), er de to Ringdele i Virkeligheden uafhængige af hinanden og har hver sin Slutplan, som gaar gennem Endepunkterne af M_0 -Ordinaterne i Charniererne og bestemmes for hver Ringdel for sig ved at tage Momentet om Linien gennem de to Charnierer.

Hvis Ringen derimod bestaar af to Dele forbundne ved to uafhængige Charnierer, bliver Slutplanen fælles for de to Ringdele og bestemmes derved, at den skal gaa gennem Endepunkterne af M_0 -Ordinaterne i de to Charnierer og afskære et Volumen, hvis Moment om Forbindelseslinien mellem Charniererne er lig det samlede M_0 -Volumens Moment om samme Linie.

To faste Indspændinger er ækvivalent med en uendelig stiv Stang mellem Indspændingspunkterne, og Ringen deles herved i to af hinanden uafhængige indspændte Buer. For hver af disse bestemmes Slutplanen paa sædvanlig Maade, idet dog den uendelig stive Stang helt udgaar af Beregningerne, da det til den svarende Areal og Volumen bliver uendelig lille.

Stangpolygoner i Ligevægt.

En Stangpolygon er Ligevægtsfigur for en given Belastning, naar Polygonens Vinkler ikke vilde forandres, hvis der indførtes Charnierer i Knudepunkterne.

Naar man i en saadan Polygon, se Fig. 6, til hver Polygonsides virkelige Belastning K , tænker sig tilføjet to Kræfter S_1 og S_2 , der bestemmes som K 's Reaktionen i Sides Endepunkter, vil saavel Polygonen som Kræfterne vedblive at være i Ligevægt, og da Kræfterne S hverken giver Momenter i Knudepunkterne eller i Polygonsiderne, kan man ved Momenternes (men ikke Normalkræfternes) Beregning gaa ud fra Polygonen belastet med de omtalte Reaktionen S i Forbindelse med den oprindelige Belastning K .

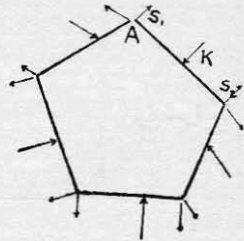


Fig. 6.

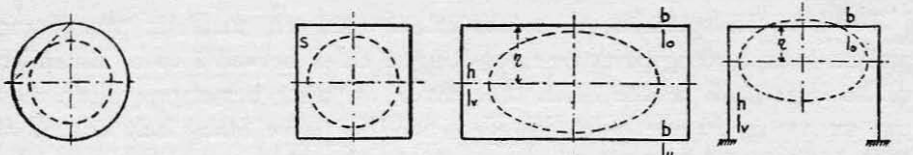
Betragtes Polygonen nu som en lukket Ring og skæres op i A , simplificeres Beregningen af M_0 -Fladen, idet man kun har at beregne Momenterne M_0 i hver Side for sig betragtet som en simpelt understøttet Bjælke. De virkelige Momenter faas da ved at indlægge en Slutplan ganske som ellers.

For ensformig fordelt Belastning, virkende vinkelret paa Siderne, vil en Polygon være i Ligevægt, naar den kan indskrives i en Cirkel. Dette indses let ved at gaa ud fra Cirklen, der jo i sig selv er Ligevægtsfigur for ensformig Belastning, og efterhaanden erstatter Buer af Cirklen med de tilsvarende Korder. Samtidig ses det, at ligesom den af Belastningen p fremkaldte Normalkraft i Cirklen er p Gange Radius, vil Normalkraften i hver Polygonside her være p Gange dennes Afstand fra den omskrevne Cirkels Centrum. Heraf følger bl. a. at »Diagonalkraften« i en ensformig belastet ikke indskrivelig Firkant er p Gange Afstanden mellem Centrene for de to Cirkler, som kan omskrives om de to ved Diagonalen adskilte Trekanter.

En Trekant er altid Ligevægtsfigur, uanset Belastningens Fordeling og Retning.

Inertiellipser.

Da Slutplanens Indlægning ofte lettes ved Anvendelse af Inertiellipsen, anføres her Inertimomenter og Inertiradier for nogle simple ringformede Arealer med konstant eller variabel Bredde $\frac{1}{EI}$. Fig. 7 er delvis en Omskrivning af Formlerne Side 299 i *A. Ostenfeld: Teknisk Statik II*.



For konstant Inertimoment I_c		For $h' = h \frac{b_u - h'}{b_o + b_u + 2h}$; $b'_o = b \frac{I_c}{I_o}$; $b'_u = \frac{I_c}{I_u}$	
$I = \pi r^3 \frac{1}{E I_c}$	$I = \frac{2s^3}{3} \frac{1}{E I_c}$	$\bar{z} = h \cdot \frac{b'_u - h'}{b'_o + b'_u + 2h}$	$\bar{z} = h \cdot \frac{h'}{b'_o + 2h}$
		$I_x = \frac{h^2}{3} \cdot \frac{b'_u(3b'_o + 2h) + h'(2b'_o + h)}{(b'_o + b'_u + 2h) \cdot E I_c}$	$I_x = \frac{h^2}{3} \cdot \frac{h'(2b'_o + h)}{b'_o + 2h} \cdot \frac{1}{E I_c}$
		$I_y = \frac{b^2}{12} \cdot (b'_o + b'_u + 6h') \cdot \frac{1}{E I_c}$	$I_y = \frac{b^2}{12} \cdot (b'_o + 6h') \cdot \frac{1}{E I_c}$
$i = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$i = \frac{s}{\sqrt{6}}$	$i_x = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{3b'_u(3b'_o + 2h) + 3h'(2b'_o + h)}}{b'_o + b'_u + 2h}$	$i_x = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{3h'(2b'_o + h)}}{b'_o + 2h}$
		$i_y = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{b'_o + b'_u + 6h'}{3(b'_o + b'_u + 2h)}}$	$i_y = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{b'_o + 6h'}{3b'_o + 6h'}}$

Fig. 7.

Anvendelser.

1. En kvadratisk lukket Ramme $ABCD$ med konstant Inertimoment og Sidelængde s er ensformig belastet paa Bjælken CD og simpelt understøttet i A og B (Fig. 8).

Da Rammen er i Ligevægt, behøver man kun at tage Hensyn til M_0 Fladearealet $\frac{ps^3}{12}$ for den belastede Side. Nullinien bestemmes som Antipolar til M_0 Tyngdepunktet T og ligger i Afstanden $\frac{s}{3}$ under O , da

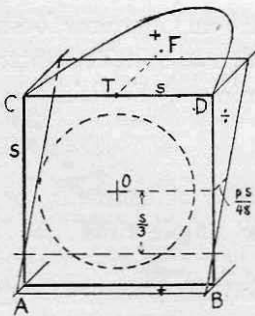


Fig. 8.

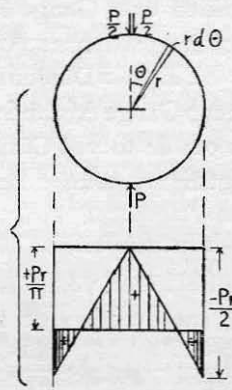


Fig. 9.

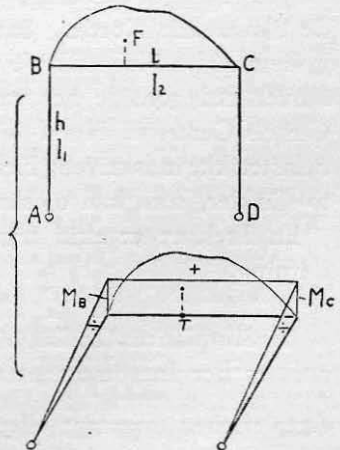


Fig. 10.

$i^2 = \frac{s^2}{6}$. Slutplanen skal gaa gennem Nullinien, og dens Højde over Rammens Centrum O skal være lig M_0 -Fladens Middelordinat, altsaa i det foreliggende Tilfælde $\frac{ps^3}{12} : 4s = \frac{ps^2}{48}$, hvorved Slutplanen er fuldt bestemt.

M_A og M_B bliver $\frac{ps^2}{96}$, M_C og M_D bliver $\frac{-5}{96} ps^2$.

2. En cirkulær Ring med konstant Inertimoment paavirkes af en Kraft P i to diametralt modsatte Punkter.

Idet Ringen (se Fig. 9, øvre Billede) skæres op midt gennem den ene Kraft P , og den frie Ende altsaa paavirkes af Kraften $\frac{P}{2}$, falder Ringens Tyngdepunkt sammen med M_0 -Fladens Tyngdepunkt. Slutplanen (se Fig. 6, nedre Billede) bliver derfor parallel med Ringens Plan, og dens Afstand derfra bliver lig M_0 -Fladens Middelordinat $\frac{F}{L}$.

$$F = 2 \int_0^\pi -\frac{F}{2} r \sin \Theta \cdot r d\Theta = Pr^2 \left[\cos \Theta \right]_0^\pi = -2Pr^2$$

$$L = 2\pi r; \quad \frac{-F}{L} = +\frac{2Pr^2}{2\pi r} = +\frac{Pr}{\pi}.$$

3. En To-Charniers-Portal med vilkaarlig lodret Belastning paa den øvre Bjælke BC (Fig. 10)*.

Da Portalen er i Ligevægt, tages der kun Hensyn til den simple M_0 -Flade med Areal F . Slutplanen maa gaa gennem AD , og altsaa er $M_B = M_C$.

Idet Inertimomenterne for Bjælken og Søjlerne er henholdsvis I_2 og I_1 , indføres Stivhedsforholdet $\frac{h}{I_1} \cdot \frac{I_2}{l} = k$. Den eneste ubekendte $M_B = M_C$ bestemmes ved at tage Momentet om AD :

$$\frac{F}{I_2} \cdot h = \frac{lM_B}{I_2} \cdot h + \frac{hM_B}{I_1} \cdot \frac{2}{3}h$$

$$3F = 3lM_B + 2h \frac{I_2}{I_1} M_B$$

$$M_B = M_C = \frac{3F}{3l + 2h \cdot \frac{I_2}{I_1}} = \frac{F}{l} \cdot \frac{3}{3 + 2k}$$

4. Indspændt Portal belastet med en lodret excentrisk virkende Kraft P (se Fig. 11).

Portalens, som ikke er i Ligevægt, skæres op for oven. $\frac{M_0}{EI}$ bliver Nul

*) Her og i Exempel 5 er Bogstavbetegnelserne holdt i Overensstemmelse med Kleinlogel: Rahmenformeln.

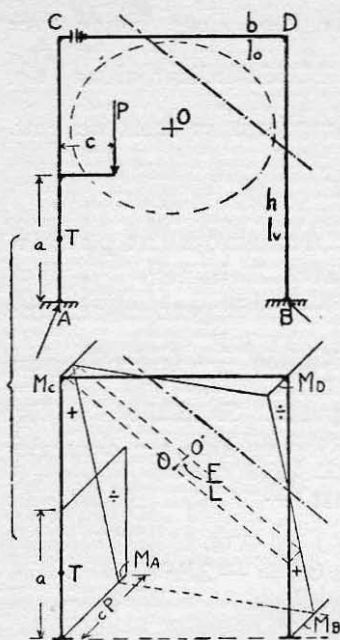


Fig. 11.

paa Strækningen BDC , da Kraften P og de to Reaktioner A og B holder hverandre i Ligevægt. Paa Strækningen AB er $\frac{M_0}{EI}$ ligelædes Nul, da Indspændingerne kan erstattes med en uendelig stiv Stang. Hele M_0 -Voluminet bliver altsaa en rektangulær Plade med Højde a , Bredde cP og Tykkelse $\frac{1}{EI_v}$ (se den nedre Figur).

I den øvre Figur er Inertiellipsen antydet, og Nulliniens Beliggenhed er tegnet som Antipolar til M_0 -Tyngdepunktet T , hvorefter Slutplanen bestemmes ved Hjælp af Ordinaten i O , som er $\frac{F}{L} = \frac{acP}{EI_v} \cdot \left(\frac{b}{EI_0} + \frac{2h}{EI_v} \right)$. I den nedre Figur er Slutplanens Skæringslinie med Prismet konstrueret, idet der gennem O er lagt en Hjælpeplan vinkelret paa Portalens Plan og parallel med Nullinien.

Anser man den ved Konstruktionen opnaaede Nøjagtighed for utilstrækkelig, vil den grafiske Løsning dog gøre Nytte som Kontrol, hvis Opgaven skal løses ved aritmetisk Beregning. Til Beregning af Hjørnemomenterne M_A , M_B , M_C og M_D har man, da Snittet er plant:

$$M_C + M_D = (cP - M_A) - M_B, \text{ altsaa } M_C = cP - (M_A + M_B + M_D). \quad (1)$$

Volumensætningen giver, idet $a' = \frac{aI_c}{I_v}$, $h' = \frac{hI_c}{I_v}$, $b' = \frac{bI_c}{I_0}$, og idet man benytter det Kunstgreb, at f. Eks. langs BD kan de to smaa Trekanter med modsat Fortegn og Højderne M_B og M_D erstattes med to Trekanter, der har Højderne M_B og M_D , men samme Grundlinie h :

$$a' \cdot cP = h' \frac{cP - M_A + M_C}{2} + b' \frac{M_C - M_D}{2} + h' \frac{M_B - M_D}{2}. \quad (2)$$

Moment om AC giver:

$$b' \cdot M_C \cdot \frac{b}{3} + h' \cdot M_B \cdot b = b' \cdot M_D \cdot \frac{2}{3} b + h' \cdot M_D \cdot b. \quad (3)$$

Moment om CD giver:

$$a' \cdot cP \left(h - \frac{a}{2} \right) = \frac{h'}{2} \left(\frac{h}{3} M_C + \frac{2h}{3} (cP - M_A) + \frac{2h}{3} M_B - \frac{h}{3} M_D \right). \quad (4)$$

Hvis Strækningen ACD er t° varmere end Resten, se Fig. 12, vil Nulllinien X_1 for Temperaturmomenterne gaa gennem O og være kons

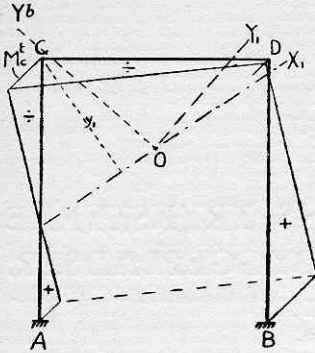


Fig. 12.

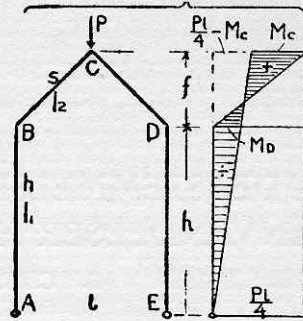


Fig. 13.

jugeret med den vinkelrette Y^b paa Diagonalretningen Y_1 . Temperaturmomentet M_c^t bliver $\frac{-\epsilon t \sqrt{b^2 + h^2}}{Z_{x_1 y_1}} \cdot y_1$, hvor y_1 er C's Afstand fra X_1 , og $Z_{x_1 y_1} = \int \frac{x_1 y_1 ds}{EI}$ bestemmes ved Land's Cirkel, se Fig. 3.

5. Symmetrisk To-Charniers-Stangpolygon belastet med en lodret Kraft (Fig. 13).

Polygonen er ikke i Ligevægt. Snittet lægges midt gennem Kraften P , hvorved M_0 bliver Nul foroven og $\frac{-Pl}{4}$ paa Strækningen DE . Slutplans-Ordinaten i E bliver, da der er Charnier i E , lig M_0 's Ordinaten $\frac{Pl}{4}$, og M_c , som er den eneste ubekendte, findes ved at tage Momentet om AE af de skraverede Dele:

$$\frac{s}{I_2} M_c \left(h + \frac{2}{3} f \right) = \frac{s}{I_2} M_D \left(h + \frac{f}{3} \right) + \frac{h}{I_1} \cdot M_D \cdot \frac{2}{3} h,$$

hvilket, da M_D i Følge Figuren er $\frac{h}{f+h} \left(\frac{Pl}{4} - M_c \right)$, og idet man sætter $\frac{hI_2}{sI_1} = k$, fører til den i Kleinlogel: Rahmenformeln angivne Værdi:

$$M_c = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{h^2 (3 + 2k) + fh}{h^2 (3 + k) + f(3h + f)}.$$